

РАЗДЕЛ 2

МОДЕЛИ, СИСТЕМЫ, СЕТИ В ТЕХНИКЕ

УДК 004.925.83

DOI 10.21685/2227-8486-2020-4-6

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Ю. Н. Косников

RADIAL BASIS FUNCTIONS USE IN GEOMETRIC MODELING OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS OF VISUALIZATION

Yu. N. Kosnikov

Аннотация. *Предмет и цель работы.* Применение радиальных базисных функций (РБФ) в области визуализации имеет своеобразие, которое следует учитывать. Настоящая статья носит обзорно-постановочный характер, что обуславливает ее актуальность, так как материалы, посвященные системному исследованию РБФ в задачах визуализации, появляются нечасто. РБФ приносят положительный эффект и в решение чисто геометрических задач визуализации, и в повышение их качества. Рассматриваются вопросы геометрического моделирования неаналитических поверхностей, заданных множеством опорных точек. Цель статьи – показать методы создания геометрических форм, удовлетворяющих требованиям эргономичности и позволяющих применять эффективные сеточные алгоритмы визуализации. Возможности РБФ для повышения качества и производительности визуализации будут рассмотрены в следующей статье. *Методы.* Рассмотрены два подхода к регуляризации расстановки опорных точек. Первый заключается в переходе к новым опорным точкам, принадлежащим реконструируемой поверхности и расставленным упорядоченно. Второй подход использует вспомогательную систему координат, в которой исходные опорные точки оказываются расставленными в узлах координатной сетки. Предложено от функций радиального базиса перейти к функциям ортогонального базиса, позволяющим оптимизировать процесс интерполяции. *Результаты и выводы.* Обосновано применение явной формы представления интерполяционных выражений как для незамкнутых, так и для замкнутых поверхностей объектов визуализации. Описана локальная интерполяция на основе РБФ для регуляризации опорных точек. Оценены возможности функций радиального и ортогонального базиса для интерполяции поверхностей. Предложены разновидности функций ортогонального базиса, позволяющие выполнять их вычисление по приращениям. К особенностям геометрического моделирования в задачах визуализации относятся задание поверхности объектов визуализации рассредоточенными опорными точками, эргономичность результатов моделирования, возможность выполнения операций моделирования в реальном времени. На основе анализа перечисленных особенностей сформулированы критерии

© Косников Ю. Н., 2020

выбора средств моделирования. Даны рекомендации по выбору этих средств: явная или параметрическая форма записи интерполянта, локальная (сегментная) интерполяция со стыковкой сегментов, использование РБФ с компактным носителем, применение функций ортогонального базиса.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, визуализация, трехмерный объект, радиальная базисная функция, смешивающая функция ортогонального базиса.

Abstract. Subject and goals. The use of radial basis functions (RBF) in the field of visualization has a peculiarity that should be taken into account. This article is of a review and staging nature, which determines its relevance, since materials devoted to the systematic study of RBF in visualization tasks appear infrequently. RBFs bring a positive effect both in solving purely geometric visualization problems and in improving its quality. This article deals with the problems of geometric modeling of non-analytical surfaces defined by a set of reference points. The purpose of the article is to show methods for creating geometric shapes that meet the requirements of ergonomics and allow the use of effective grid visualization algorithms. The possibilities of RBF for improving the quality and performance of visualization will be discussed in the next article. **Methods.** There are two approaches to regularizing the placement of reference points. The first is to move to new reference points that belong to the reconstructed surface and are arranged in an orderly manner. The second approach uses an auxiliary coordinate system, in which the original reference points are placed at the nodes of the coordinate grid. **Results and conclusions.** The use of an explicit form of representation of interpolation expressions for both open and closed surfaces of visualization objects is justified. Local interpolation based on RBF for regularization of reference points is described. The possibilities of the radial and orthogonal basis functions for surface interpolation are evaluated. Varieties of orthogonal basis functions that allow their calculation in increments are proposed. The features of geometric modeling in visualization tasks include: setting the surface of visualization objects with dispersed reference points, usability of modeling results, and the ability to perform modeling operations in real time. Based on the analysis of these features, the criteria for choosing modeling tools are formulated. Recommendations on the choice of these tools are given: explicit or parametric form of interpolant recording, local (segment) interpolation with segment joining, use of RBF with compact support, application of orthogonal basis functions.

Keywords: geometric modeling, visualization, three-dimensional object, radial basis function, blending function of orthogonal basis.

Введение

Радиальные базисные функции (РБФ) находят широкое применение при решении многих прикладных задач. Они используются в качестве функций активации искусственных нейронных сетей и гладкой интерполяции зависимостей, заданных ограниченным набором характерных (опорных) точек. Хорошие интерполирующие свойства РБФ позволяют эффективно использовать их в графических приложениях. Объекты графического отображения зачастую описываются именно набором («облаком») неупорядоченных характерных точек (scattered data) и значительно различаются по сложности конфигурации. Задачи реконструкции поверхности объектов по облаку опорных точек актуальны для многих предметных областей. В археологии недостающие фрагменты находок, например посуды, скульптур, частей скелета, могут быть смоделированы на основе интерполяции по сохранившимся фрагментам [1]. В геоинформационной системе участок местности по замерам топографа восстанавливается в 3D-формате с помощью того или иного вида интерполяции [2, 3]. В медицине интерполяционные методы на основе

РБФ позволяют получить модели фрагментов тела человека [4, 5]. В системе автоматизированного проектирования модель будущего изделия строится интерполяционным способом по характерным точкам, заданным разработчиком или сканером [6]. В компьютерных интерфейсах виртуального окружения геометрическая модель объектов интерфейса занимает большой объем памяти, для минимизации которого можно хранить в компьютере лишь опорные точки интерфейсного пространства, а его полноформатное 3D-представление получать методом интерполяции [7]. В научной визуализации значения контролируемой физической величины (температуры, концентрации, напряжения) снимаются датчиками в ограниченном числе точек, а тенденция поведения этой величины устанавливается с помощью интерполяции [8].

Однако решение интерполяционных задач в системах геометрического моделирования и визуализации трехмерных объектов имеет свои особенности. Первая из них заключается в том, что «потребителем» результатов работы таких систем является человек со всеми достоинствами и недостатками визуального восприятия. Есть объекты, в основном антропогенные, форма которых уверенно опознается человеком и, следовательно, должна моделироваться точно. Модели других объектов, в основном природных, например, земной поверхности, напротив, воспринимаются наблюдателем адекватно оригиналам даже при значительной погрешности моделирования. Вторая особенность визуализации трехмерных объектов в том, что во многих случаях они должны представляться наблюдателю в режиме реального времени (РВ). Процессы моделирования и визуализации должны протекать с задержкой, соизмеримой с временем реакции человека. Это относится, например, к интерфейсам систем технологического, военного, игрового назначения. В качестве третьей особенности можно назвать неупорядоченность опорных точек, которые получаются в результате эксперимента или сбора реальных данных. Такая неупорядоченность требует применения бессеточных (meshless) методов интерполяции, которые, в отличие от сеточных, имеют более высокую сложность и более низкую производительность [9].

Сочетание перечисленных особенностей требует совместить в интерполяционной модели высокую детальность и достаточно простую форму математического описания. В связи с этим встает вопрос о месте и возможностях РБФ применительно к моделированию и визуализации трехмерных объектов в режиме РВ. Этим вопросом занимаются довольно много специалистов разных стран, однако их решения, как правило, учитывают некоторые из названных особенностей моделирования, а не их сочетание. Например, в работах [10, 11] описан процесс моделирования неаналитической поверхности с произвольным расположением опорных точек, однако применяемый математический аппарат делает визуализацию в режиме РВ весьма проблематичной. В работах [12, 13] предложены виды РБФ, позволяющие применить быстрые алгоритмы их вычисления, но это можно сделать при регулярном расположении опорных точек. В [9, 14] описаны операции моделирования бессеточным методом, которые затруднительно реализовать в режиме РВ. В итоге вопрос эффективного использования достоинств РБФ с одновременной минимизацией их недостатков не теряет своей актуальности. В статье названы задачи геометрического моделирования, появляющиеся при использовании РБФ в системах визуализации РВ, а также показаны пути их решения.

Выбор математического аппарата

Опорные точки будущей поверхности обычно задаются в пространстве тройкой декартовых координат (x_i, y_i, z_i) , где i – номер точки. Для интерполяции функциональной зависимости F с целью дальнейшей визуализации, как правило, применяется общая форма ее записи [10]:

$$F(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(r_i) = 0, \quad (1)$$

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (2)$$

где x, y, z – координаты текущей точки поверхности; $\Phi(r_i)$ – выбранная РБФ, обычно одного вида для всех опорных точек; r_i – декартово расстояние от текущей точки до i -й опорной точки; λ_i – весовой коэффициент (коэффициент влияния) i -й опорной точки; N – количество опорных точек.

Весовые коэффициенты λ_i находятся из условий интерполяции, например из условия точного прохождения полученной в результате реконструкции поверхности через все опорные точки. После подстановки найденных значений λ_i в (1) выражения (1), (2) позволяют найти промежуточные точки поверхности. Однако для визуализации 3D-объектов эти выражения весьма неудобны, так как требуют применения метода, основанного на трассировке лучей. Для нахождения промежуточных точек поверхности необходимо организовать сканирование объема, вмещающего опорные точки, по некоторому регулярному закону и выявить точки, которые с заданной точностью обращают выражение (1) в ноль. Эти точки принадлежат поверхности и могут быть использованы в качестве основы для визуализации. Метод трассировки является чрезвычайно затратным в вычислительном отношении и в случае сложных сцен не реализуется в режиме РВ.

Для повышения производительности операций визуализации следует применить другую форму математического описания реконструируемой поверхности – явную или параметрическую. Однако применение этих форм описания накладывает ограничения на вид поверхности, в частности, требует, чтобы описывающая ее функция была однозначной или чтобы была задана очередность опорных точек. Рекомендации по решению этой задачи изложены далее.

Для реконструкции поверхности, описываемой однозначной функцией (будем называть ее однозначной поверхностью), используется интерполянт в явной форме. Он представляет собой зависимость одной координаты пространства c от расстояния r_i , которое является функцией аргументов u, v – двух других координат пространства:

$$c = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(r_i). \quad (3)$$

При незамкнутой поверхности аргументами u, v являются декартовы координаты x, y , а $c \equiv z$. В этом случае r_i находится на плоскости аргументов

и представляет собой декартово расстояние между проекциями i -й опорной и текущей точек. Алгоритм интерполяции предполагает перебор по некоторому закону пар значений x, y , которые задают проекцию текущей пространственной точки на плоскость аргументов. Для каждого сочетания x, y вычисляется значение z .

Для реконструкции замкнутой поверхности интерполяцию следует проводить в сферической системе координат. Для этого сначала параллельным переносом исходная декартова система координат помещается во внутреннее пространство объекта интерполяции, например в его геометрический центр координат. Опорные точки переводятся в сферическую систему координат по известным выражениям:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\ \varphi_i &= \arctg\left(\frac{y_i}{x_i}\right), \\ \theta_i &= \arccos\left(\frac{z_i}{\rho_i}\right),\end{aligned}$$

где ρ_i – радиус-вектор, φ_i – азимутальный угол и θ_i – полярный угол i -й опорной точки.

В этом случае в выражении (3) независимыми переменными u, v будут угловые координаты φ, θ текущей точки. Расстояние между опорной и текущей точками также выражается в угловых единицах:

$$r_i = \arccos(\cos\theta \cdot \cos\theta_i + \sin\theta \cdot \sin\theta_i \cdot \cos(\varphi - \varphi_i)).$$

Алгоритм интерполяции предполагает перебор по некоторому закону пар значений φ, θ ($\varphi = 0 \dots 2\pi, \theta = 0 \dots \pi$) и вычисление для них значения радиуса-вектора текущей точки ρ . Для визуализации множество найденных текущих точек переводится в декартову систему координат.

Поверхности сложной формы зачастую являются многозначными (описываются многозначными функциями). В этом случае можно попытаться ввести вспомогательную систему координат, и притом такую, что в ней интерполянты поверхности станут однозначной функцией. Для этого следует рационально выбрать местоположение начала координат и направления координатных осей. Вариант методики перехода во вспомогательную систему координат описан в [15]. Другим вариантом является установление между опорными точками отношения упорядоченности. Это достаточно сложная самостоятельная задача, рекомендации по решению которой даны далее.

В случае упорядоченности опорных точек применяется параметрическое описание поверхности. Оно включает три уравнения вида (3), в которых при использовании декартовых координат $s = x, y, z$, а при использовании сферических $s = \rho, \varphi, \theta$. Коэффициенты влияния опорных точек – свои для каждой координаты, а r_i – декартово расстояние между текущей и опорными точками, вычисляемое на поверхности аргументов-параметров u, v . Система координат u, v представляет собой ортогональную сетку, «наброшенную» на реконструируемую поверхность. Каждая опорная точка в соответствии с за-

коном упорядоченности располагается в одном из узлов этой сетки. Ее обход с заданным шагом по аргументам дает вычисленные по выражениям (3) координаты текущих точек поверхности.

Необходимые коэффициенты λ_i во всех формах описания поверхности находятся предварительно из условия точного прохождения поверхности через опорные точки. Для этого составляется и решается система из N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$c_j = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(r_{ij}), \quad j = 1 \dots N,$$

где j – номер опорной точки, для которой записывается условие прохождения поверхности; r_{ij} – расстояние между i -й и j -й опорными точками.

В матричной форме СЛАУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(r_{11}) & \Phi(r_{21}) & \dots & \Phi(r_{N1}) \\ \Phi(r_{12}) & \Phi(r_{22}) & \dots & \Phi(r_{N2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi(r_{1N}) & \Phi(r_{2N}) & \dots & \Phi(r_{NN}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix},$$

а ее решение после ввода очевидных обозначений:

$$\Lambda = C \cdot \Phi^{-1}.$$

Применение некоторых разновидностей РБФ дает плохо обусловленную матрицу Φ , что при визуализации приводит к скачкам поверхности между опорными точками. В этом случае специалисты рекомендуют видоизменить форму описания поверхности, добавив в выражение (3) линейный полином [16]. Решение СЛАУ усложняется и замедляется, что для N в несколько тысяч точек является существенным. Устранить названный недостаток можно рациональным выбором вида и параметров РБФ.

Представление неупорядоченного множества опорных точек на регулярной сетке

Размещение опорных точек в узлах регулярной сетки имеет два существенных плюса. Во-первых, для описания поверхности может быть применена явная или параметрическая форма записи интерполянта, достоинства которой были отмечены. Во-вторых, между опорными точками устанавливается отношение порядка, что позволяет применить быстрые методы вычисления РБФ и реализовать режим РВ. К регуляризации расстановки опорных точек существует два подхода: первый заключается в переходе к новым опорным точкам, принадлежащим реконструируемой поверхности и расставленным в системе координат упорядоченно, второй – во введении такой системы координат, что исходные опорные точки окажутся расставленными в узлах координатной сетки.

Определить новые опорные точки на еще несуществующей поверхности можно только с помощью интерполяции или аппроксимации. Возможна глобальная интерполяция на основе РБФ, которая дает интерполянт вида (3) в явной или параметрической форме. Число слагаемых интерполянта равно

числу опорных точек, которое для протяженной поверхности может достигать нескольких тысяч. В связи с этим глобальную интерполяцию имеет смысл применять для поверхностей ограниченных размеров. В этом случае в пространстве аргументов u, v задается множество пар значений, выбранных в соответствии с некоторым регулярным законом. Вычисление координаты c по выражению (3) дает набор новых опорных точек, с определенной погрешностью принадлежащих исходной поверхности. Эксперимент показал, что при количестве исходных опорных точек, исчисляемом сотнями, среднеквадратическая погрешность представления тестовой поверхности новыми опорными точками не превысила 1,8 % при использовании РБФ S^0 Матерн, а для остальных РБФ имела порядок десятых долей процента [17].

В случае большого числа исходных опорных точек для нахождения новых опорных точек больше подходит локальная аппроксимация или интерполяция. Для каждого сочетания значений u, v , задаваемых в пространстве аргументов по регулярному закону, находится координата $\tilde{c}$ точки поверхности, в процессе вычисления которой участвует ограниченное количество близких исходных опорных точек. Для этого по поверхности аргументов с определенным шагом перемещается квадрат (или круг). На каждом шаге находится координата $\tilde{c}$ точки поверхности, расположенной в его центре. Размеры квадрата выбираются такими, чтобы внутрь него попало заданное количество M исходных опорных точек. Образно можно представить, что на локальном множестве опорных точек строится фрагмент аппроксимирующей поверхности, и на ней находится точка с заданными значениями координат-аргументов. Вариантом применения такого способа является «плавающая» аппроксимация на основе метода наименьших квадратов [18]. Фрагмент аппроксимирующей поверхности – поверхности второго порядка (квадрики) – описывается уравнением вида

$$\tilde{c} = k_1 u^2 + k_2 v^2 + k_3 uv + k_4 u + k_5 v + k_6, \quad (4)$$

где $k_1, \dots, k_6$ – коэффициенты формы поверхности.

Для определения неизвестных коэффициентов формы применяется метод наименьших квадратов, суть которого в минимизации отклонения аппроксимирующей поверхности от набора исходных опорных точек:

$$F = \sum_{i=1}^M (c_i - \tilde{c}_i)^2 \rightarrow \min,$$

где M – количество опорных точек внутри квадрата; i – номер опорной точки.

Для нахождения шести коэффициентов формы по известной методике составляется шесть уравнений вида

$$\frac{\partial F}{\partial k_i} = 0,$$

которые дают СЛАУ. Найденные путем ее решения коэффициенты подставляются в выражение (4), по которому при задании выбранных значений u, v находится очередная новая опорная точка.

Существенным недостатком описанного способа является большая погрешность аппроксимации для некоторых видов реконструируемых поверх-

ностей, например для поверхности с несколькими локальными экстремумами высоты рельефа в пределах плавающего квадрата [19]. Повысить точность реконструирования поверхности позволяет локальная интерполяция.

Существует ряд методов локальной интерполяции, в которых координата $\tilde{z}$ вычисляется как взвешенная сумма одноименных координат близких опорных точек: метод обратно взвешенных расстояний, метод Шепарда, метод естественной окрестности, метод сети Цао Ена, метод скользящего среднего. Для вычислений применяется математическое выражение, сходное с (3). Различия заключаются в законе выбора коэффициентов влияния (весовых коэффициентов) опорных точек [20]. Перечисленные методы широко применяются при решении задач геоинформатики, экологии, прокладки коммуникаций. В источниках информации, относящихся к этим областям, отмечены ограничения и недостатки методов, например, в [21–23]. Краткое изложение недостатков приведено в [24, 25].

Эффективным способом локальной интерполяции является применение РБФ. Используется описанный плавающий квадрат, в пределах которого на ограниченном множестве исходных опорных точек M выполняется РБФ-интерполяция. Для центральной точки квадрата по выражению (3) находится координата высоты очередной новой опорной точки. Погрешность интерполяции зависит от количества M и выбранного вида РБФ. Для объектов с неаналитическим представлением, например для участков земной поверхности, возможна визуализация с некоторой погрешностью, зависящей от восприятия человека. В таком случае в процессе регуляризации число опорных точек может быть редуцировано и тем самым снижены вычислительные затраты на визуализацию. В качестве примера такой редукции можно привести публикацию [26].

Второй подход к регуляризации расстановки опорных точек заключается в их «привязке» к параметрической системе координат, расположенной особым образом. Вводится система координат u, v , начальное положение которой совпадает с системой координат x, y (в случае декартовой системы координат) или φ, θ (в случае сферической). Вводится отсчет координат u, v , удобный для последующей интерполяции, например целочисленный. Опорные точки проецируются на пространство u, v . Каждая опорная точка получает пару каких-то значений u, v . Далее ее координаты переопределяются: они принимаются равными координатам ближайшего узла координатной сетки u, v . Образно можно представить, что координатные линии (или углы) «изгибаются», в результате чего проходят через опорные точки. Тем самым все опорные точки привязываются к узлам координатной сетки u, v , могут быть отсортированы и получить отношение порядка. Параметрическая система координат u, v является ортогональной, шаги между ее узлами одинаковы. В результате возникает неравномерная расстановка опорных точек на равномерной параметрической сетке.

Выбор вида РБФ

Сложность РБФ-интерполяции заключается в том, что в случае визуализации протяженной поверхности интерполянт может иметь сотни и тысячи слагаемых. Оперирование такими громоздкими математическими конструкциями (решение СЛАУ, вычисление значений в режиме РВ) встречает значи-

тельные трудности. Выходом является локальная интерполяция, предполагающая разбиение поверхности на фрагменты и отдельное построение этих фрагментов. Здесь следует решить две задачи: гладкой стыковки фрагментов и рационального выбора РБФ. Рекомендации по стыковке фрагментов будут изложены в следующей статье, а выбор вида РБФ необходимо проводить исходя из ряда условий:

- для локальной интерполяции рационально применять РБФ, влияние которых локализовано в пространстве, – так называемые РБФ с компактным носителем;

- вид РБФ должен быть максимально простым для вычисления с целью обеспечения визуализации в режиме РВ;

- вид РБФ должен позволять решать традиционные для визуализации геометрические задачи (нахождение нормалей к поверхности, полигонизация) известными способами.

Задача построения локализованных РБФ по возможности простого вида была поставлена еще в 1995 г. Хольгером Вендландом [12]. Им было предложено общее представление локальной РБФ:

$$\Phi(r) = \begin{cases} p(r) & \text{при } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

где $p(r)$ – степенной полином, и синтезировано несколько разновидностей таких РБФ разного порядка гладкости, например:

$$p(r) = (1-r)^3,$$

$$p(r) = (1-r)^4(4r+1),$$

$$p(r) = (1-r)^7(16r^2+7r+1).$$

Впоследствии в работах других специалистов, например [11, 27, 28], было предложено множество выражений другого вида (ϵ – показатель сглаженности):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r) &= e^{-(\epsilon r)^2} \text{ (гауссиан)}, \\ \Phi(r) &= \frac{1}{\sqrt{1+(\epsilon r)^2}} \text{ (инверсный мультиквадрик)}, \\ \Phi(r) &= \frac{112}{45}r^{\frac{9}{2}} + \frac{16}{3}r^{\frac{7}{2}} - 7r^4 - \frac{14}{15}r^2 + \frac{1}{9}, \\ \Phi(r) &= -2\cos(2\pi r) - \cos(4\pi r), \\ \Phi(r) &= e^{(10r-6)} \sin((5r-2)^2) + (3r-1)^3, \\ \Phi(r) &= \frac{6}{(1+16(r+0,5)^2) + \log(0,01(r-0,25)^2 + 10^{-5}) + 4}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Анализ известных РБФ с точки зрения простоты вычислений показывает, что те из них, в которых содержатся логарифмы, радикалы, экспоненты, тригонометрические функции должны быть выведены из рассмотрения, так как они являются вычислительно ресурсоемкими. Следует остановиться на степенных функциях, для вычисления которых можно применить быстрые алгоритмы, например основанные на методе конечных разностей. Однако и степенные РБФ не оптимальны в отношении вычислительной сложности, если речь идет о визуализации. Дело в том, что в процессе вычисления текущих точек поверхности должна создаваться ее полигональная модель, так как визуализация именно полигональных моделей аппаратно поддерживается графической системой компьютера. Алгоритм полигонизации будет простым, если за вершины полигонов принимать точки, вычисляемые при последовательном движении вдоль одной координатной оси, например u . При этом вторая координата $v = \text{const}$. По окончании области определения u осуществляется приращение координаты v , и алгоритм переходит на соседнюю координатную линию. При использовании известных РБФ на каждом шаге такого движения приходится заново вычислять декартово или угловое расстояние между текущей точкой и всеми опорными точками, применяя радикалы или тригонометрические функции.

Чтобы ускорить процесс вычисления текущих точек поверхности, следует для опорных точек перейти к таким функциям влияния, значения которых зависят не от декартова или углового расстояния до текущей точки, а от расстояний вдоль каждой координатной линии по отдельности. В этом случае при движении алгоритма полигонизации вдоль одной координаты изменяются расстояния от опорных точек до текущей точки только вдоль этой координаты, а расстояния вдоль второй координаты не изменяются и потому пересчету не подлежат. При использовании таких функций влияния теряется круговой (радиальный) характер областей влияния опорных точек. Эти области превращаются в криволинейные (в общем случае) четырехугольники, ограниченные координатными линиями u , v . Тогда функции влияния могут быть названы смешивающими функциями ортогонального базиса (СФОБ, или OBBF – orthogonal basis blending functions) [29, 30]. Обобщенная запись СФОБ, действующих вдоль координатных линий u , v , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r_u, r_v) &= bf_u bf_v, \\ bf_u &= \begin{cases} (1 - r_u^r)^m & \text{при } r_u < 1, \\ 0 & \text{при } r_u \geq 1, \end{cases} \\ bf_v &= \begin{cases} (1 - r_v^s)^n & \text{при } r_v < 1, \\ 0 & \text{при } r_v \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где r_u , r_v – расстояния между текущей и опорной точками, измеренные вдоль координатных линий u , v ; m , n , r , s – показатели степени, определяющие форму СФОБ (обычно $m = n$, $r = s$, однако могут быть использованы различные значения).

В таблице 1 приведено математическое описание некоторых СФОВ, а на рис. 1 показан их вид в декартовом пространстве ($r_u \equiv r_x$, $r_v \equiv r_y$).

Таблица 1

Примеры смешивающих функций (СФ) ортогонального базиса

Наименование	Описание	Вид	Область влияния
1. Параболическая выпуклая СФ	$\Phi(r_u, r_v) = (1 - r_u^2)(1 - r_v^2)$	Рис. 1,а	Локальная
2. Параболическая вогнутая СФ	$\Phi(r_u, r_v) = (1 + r_u^2)(1 + r_v^2)$	Рис. 1,б	Глобальная
3. СФ-аналог гауссиана	$\Phi(r_u, r_v) = (1 - r_u^2)(1 - r_v^2)$	Рис. 1,в	Локальная
4. Биквадратная СФ	$\Phi(r_u, r_v) = (r_u^2 - 1)^2(r_v^2 - 1)^2$	Рис. 1,г	Локальная

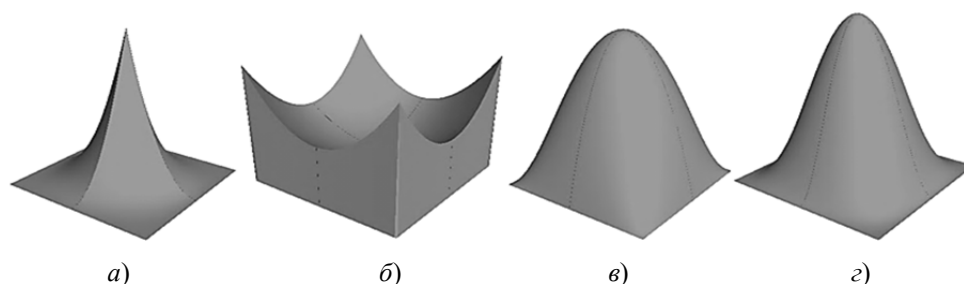


Рис. 1. Графическое представление смешивающих функций ортогонального базиса (см. табл. 1)

Изобразительные и точностные возможности СФОВ исследованы экспериментально и отражены в публикациях [17, 31]. В них рассмотрены СФОВ следующего вида:

- для построения незамкнутых поверхностей – параболическая вогнутая, аналог гауссиана, биквадратная;
- для построения замкнутых поверхностей – аналог гауссиана в форме

$$\Phi(r_\phi, r_\theta) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{2r_\phi}{\pi}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{2r_\theta}{\pi}\right)^2\right) & \text{при } |r_\phi| < \frac{\pi}{2} \text{ и } |r_\theta| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } |r_\phi| \geq \frac{\pi}{2} \text{ или } |r_\theta| \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где r_ϕ, r_θ – угловые расстояния между текущей и опорной точками.

Среднеквадратичное отклонение реконструированной поверхности от тестовой при плотности опорных точек около 100 на единицу площади в случае незамкнутой поверхности не превышало 0,67 %, в случае замкнутой – 0,026 %.

В случае применения известных РБФ эта величина при той же плотности опорных точек составила: для гауссиана – 0,60 %, для мультиквадрика – 0,22 %, для S^4 Матерна – 0,41 %. Результаты эксперимента свидетельствуют о соизмеримой точности интерполяции с применением предложенных и известных смешивающих функций. В то же время полиномиальный характер

СФОБ позволяет вычислять значения самих функций и их производных по быстрым алгоритмам, что будет показано в следующей статье автора.

Выводы

Для выбора методов и средств моделирования пространственных объектов с целью их визуализации необходимо сформулировать критерии. Такие критерии должны вытекать из специфических черт поставленной задачи. В статье названы особенности геометрического моделирования в системах визуализации трехмерных объектов. Это, во-первых, эргономичность результатов моделирования, во-вторых, их представление в режиме реального времени, в-третьих, неупорядоченность исходных данных моделирования (scattered data). Анализ указанных особенностей позволяет сформулировать критерии выбора инструментов моделирования:

- возможность провести регуляризацию расстановки опорных точек интерполяционными или алгоритмическими методами;
- заданная степень приближения поверхности объекта к опорным точкам;
- гладкость поверхности или приемлемая по внешнему виду и алгоритмической сложности стыковка отсеков;
- получение корректных нормалей к поверхности, проведенных через ее характерные точки;
- возможность алгоритмически просто получить полигональную модель объекта.
- быстрые алгоритмы визуализации поверхности.

Перечисленным критериям удовлетворяет интерполяционное моделирование на основе РБФ при расстановке узлов интерполяции в узлах применяемой координатной сетки. Для этого может быть введена вспомогательная система координат. Возможность применить явную форму записи интерполянта значительно облегчает задачу. Предпочтение следует отдавать локальной (сегментной) интерполяции на ограниченном наборе опорных точек с последующей стыковкой сегментов. Размер интерполянта значительно снижается при использовании РБФ с компактным носителем. Возможность ускорения вычислительного процесса появляется при переходе от функций радиального базиса к функциям ортогонального базиса. Их значения зависят не от декартова или углового расстояния от узла интерполяции до текущей точки, а от расстояний вдоль каждой координатной линии по отдельности. Вопросы повышения производительности и качества визуализации более подробно будут рассмотрены в будущем в статье на тему моделирования объектов визуализации.

Библиографический список

1. Колсанов, А. В. RBF-алгоритм и его модификации для построения поверхностных компьютерных 3-D моделей в медицинской практике / А. В. Колсанов, А. С. Воронин, Б. И. Яремин, С. С. Чаплыгин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 88–93.
2. Dressler, M. Interpolation / Approximation of Surfaces Based on Numerical Tensioning and Smoothing / M. Dressler. – URL: <http://m.dressler.sweb.cz/ABOS.htm>
3. Как работают радиальные базисные функции // Сайт «ArcMap». – URL: <https://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.4/extensions/geostatistical-analyst/how-radial-basis-functions-work.htm>

4. Carr, J. C. Surface Interpolation with Radial Basis Functions for Medical Imaging / J. C. Carr, W. R. Fright, R. K. Beatson // IEEE Transactions on Medical Imaging. – 1997. – Vol. 16, no. 1. – P. 96–107. – DOI 10.1109/42.552059.
5. Башков, Е. А. Исследование возможностей применения метода радиальных симметричных функций и его модификаций для построения поверхностных компьютерных моделей в медицинской практике / Е. А. Башков, В. С. Бабков // Электронное моделирование. – 2009. – № 2. – С. 107–116.
6. Capture for SolidWorks 3D scanner. – 2014. – URL: www.3d-model.ch/produkt/geomagic-3d-scanner-capture-for-solidworks
7. Косников, Ю. Н. Технологии виртуального окружения в интерфейсах экономических информационных систем / Ю. Н. Косников, Е. А. Кольчугина // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2018. – № 3 (19). – С. 82–95.
8. Александрова, Н. В. Визуализация скалярного поля физической величины на основе радиальных базисных функций / Н. В. Александрова, Ю. Н. Косников // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : сб. ст. XXX Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – С. 70–71.
9. Skala, V. A Practical Use of Radial Basis Functions Interpolation and Approximation / V. Skala // Investigacion Operacional. – 2016. – Vol. 37, № 2. – P. 137–144. – URL: <https://rev-inv-ope.univ-paris1.fr/fileadmin/rev-inv-ope/files/37216/37216-03.pdf>
10. Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Function / J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, T. R. Evans // ACM SIGGRAPH. – 2001. – P. 67–76.
11. Larsson, E. A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs / E. Larsson, B. Fornberg // Computers and Mathematics with Applications. – 2003. – № 46. – P. 891–902.
12. Wendland, H. Piecewise polynomial, positive defined and compactly supported radial functions of minimal degree / H. Wendland // Advances in Computational Mathematics. – 1995. – Vol. 4, iss. 1. – P. 389–396.
13. Interpolating Implicit Surfaces From Scattered Surface Data Using Compactly Supported Radial Basis Functions / B. S. Morse, T. S. Yoo, P. Rheingans, D. T. Chen, K. R. Subramanian // Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI '01). – IEEE Computer Society Press, 2001. – P. 89–98.
14. Buhmann, M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations / M. D. Buhmann. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008. – 259 p.
15. Косников, Ю. Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций / Ю. Н. Косников // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Сер.: Технические науки. Информационные технологии. – 2014. – № 3 (19). – С. 176–183.
16. Grady, B. W. Radial basic function interpolation: Numerical and Analytical developments / B. W. Grady. – University of Colorado, 2000. – 155 p.
17. Косников, Ю. Н. Экспериментальное исследование изобразительных и точностных свойств смешивающих функций в задачах визуализации пространственных объектов / Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // Новые информационные технологии и системы : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – С. 28–32.
18. Кулажский, А. В. Применение нейронных сетей на основе радиальных базисных функций в моделировании рельефа местности / А. В. Кулажский // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 3 (35). – С. 118–124.
19. Петрянин, Д. Л. Анализ методов повышения точности аппроксимации и новая уточненная модель повышения точности аппроксимации / Д. Л. Петрянин // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 3. – С. 96–102.

20. *Anjyo, K.* Scattered Data Interpolation for Computer Graphics / K. Anjyo, J. P. Lewis, F. Pighin // ACM SIGGRAPH. – 2014 – P. 1–69. – URL: <https://doi.org/10.1145/2614028.2615425>
21. *Анисимов, В. А.* К вопросу использования трехмерной модели рельефа в проектировании железных дорог / В. А. Анисимов, М. А. Шуклин // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – № 4 (36). – С. 234–240.
22. *Крюкова, С. В.* Оценка методов пространственной интерполяции метеорологических данных / С. В. Крюкова, Т. Е. Симакина // Общество. Среда. Развитие. – 2018. – № 1. – С. 144–151.
23. Интерполяция ближайшей окрестности // Сайт «ArcMap». – URL: <https://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.3/manage-data/terrains/hidden-natural-neighbor-interpolation.htm>
24. *Мальцев, К. А.* Построение моделей пространственных переменных (с применением пакета Surfer) : учеб. пособие / К. А. Мальцев, С. С. Мухарамова. – Казань : Казан. ун-т, 2014. – 103 с. – URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F666019761/posobie_Surfer.pdf
25. *Александрова, Н. В.* Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм / Н. В. Александрова, А. П. Зимин, Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Сер.: Технические науки. Информационные технологии. – 2015. – № 3 (25), т. 1. – С. 51–60.
26. *Skala, V.* RBF Interpolation with CSRBF of Large Data Sets / V. Skala // International Conference on Computational Science, ICCS 2017 / Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 108. – P. 2433–2437. – URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187705091730621X>
27. *Buhmann, M.* A new class of radial basis functions with compact support / M. Buhmann // Mathematics of Computation. – 2001. – Vol. 70, № 233. – P. 307–318. – DOI 10.1090/s0025-5718-00-01251-5.
28. *Skala, V.* Novel RBF Approximation Method Based on Geometrical Properties for Signal Processing with a New RBF Function: Experimental Comparison / V. Skala, M. Cervenka // 2019 IEEE 15th International Scientific Conference on Informatics. – 2019. – P. 000451–000456. – DOI 10.1109/Informatics47936.2019.9119276.
29. *Косников, Ю. Н.* Геометрическое моделирование неаналитических поверхностей в графических системах: от функций радиального базиса к функциям ортогонального базиса / Ю. Н. Косников // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XV Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2015. – С. 117–123.
30. *Косников, Ю. Н.* Моделирование и визуализация замкнутых поверхностей с применением смешивающих функций ортогонального базиса / Ю. Н. Косников // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XVIII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2018. – С. 104–110.
31. *Kosnikov, Yu. N.* Morphing of spatial objects in real time with interpolation by functions of radial and orthogonal basis / Yu. N. Kosnikov, A. V. Kuzmin, T. H. Hoang // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1015. – URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032066/pdf>

References

1. Kolsanov A. V., Voronin A. S., Yaremin B. I., Chaplygin S. S. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. 2011, vol. 13, no. 6, pp. 88–93. [In Russian]
2. Dressler M. *Interpolation / Approximation of Surfaces Based on Numerical Tensioning and Smoothing*. Available at: <http://m.dressler.sweb.cz/ABOS.htm>

3. *Kak rabotayut radial'nye bazisnye funktsii* [How radial basis functions work]. Arch-Map website. Available at: <https://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.4/extensions/geostatistical-analyst/how-radial-basis-functions-work.htm> [In Russian]
4. Carr J. C., Fright W. R., Beatson R. K. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 1997, vol. 16, no. 1, pp. 96–107. DOI 10.1109/42.552059.
5. Bashkov E. A., Babkov V. S. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2009, no. 2, pp. 107–116. [In Russian]
6. *Capture for SolidWorks 3D scanner*. 2014. Available at: www.3d-model.ch/produkt/geomagic-3d-scanner-capture-for-solidworks
7. Kosnikov Yu. N., Kol'chugina E. A. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* [Models, systems, and networks in economics, technology, nature, and society]. 2018, no. 3 (19), pp. 82–95. [In Russian]
8. Aleksandrova N. V., Kosnikov Yu. N. *Problemy avtomatizatsii i upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh: sb. st. XXX Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Problems of automation and control in technical systems: collection of articles XXX International scientific and technical conf.]. Penza: Izd-vo PGU, 2013, pp. 70–71. [In Russian]
9. Skala V. *Investigacion Operacional*. 2016, vol. 37, no. 2, pp. 137–144. Available at: <https://rev-inv-ope.univ-paris1.fr/fileadmin/rev-inv-ope/files/37216/37216-03.pdf>
10. Carr J. C., Beatson R. K., Cherrie J. B., Mitchell T. J., Fright W. R., McCallum B. C., Evans T. R. *ACM SIGGRAPH*. 2001, pp. 67–76.
11. Larsson E. A., Fornberg B. *Computers and Mathematics with Applications*. 2003, no. 46, pp. 891–902.
12. Wendland H. *Advances in Computational Mathematics*. 1995, vol. 4, iss. 1, pp. 389–396.
13. Morse B. S., Yoo T. S., Rheingans P., Chen D. T., Subramanian K. R. *Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI '01)*. IEEE Computer Society Press, 2001, pp. 89–98.
14. Buhmann M. D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, 259 p.
15. Kosnikov Yu. N. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Ser.: Tekhnicheskie nauki. Informatsionnye tekhnologii* [XXI century: results of the past and problems of the present plus. Ser.: Technical Sciences. Information technology]. 2014, no. 3 (19), pp. 176–183. [In Russian]
16. Grady B. W. *Radial basic function interpolation: Numerical and Analytical developments*. University of Colorado, 2000, 155 p.
17. Kosnikov Yu. N., Khoang T. Kh. *Novye informatsionnye tekhnologii i sistemy: materialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [New Information Technologies and Systems: proceedings of the XV International scientific and technical conf.]. Penza: Izd-vo PGU, 2018, pp. 28–32. [In Russian]
18. Kulazhskiy A. V. *Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Bulletin of the Rostov State University of Railway Engineering]. 2009, no. 3 (35), pp. 118–124. [In Russian]
19. Petryanin D. L. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2016, no. 3, pp. 96–102. [In Russian]
20. Anjyo K., Lewis J. P., Pighin F. *ACM SIGGRAPH*. 2014, pp. 1–69. Available at: <https://doi.org/10.1145/2614028.2615425>
21. Anisimov V. A., Shuklin M. A. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analysis. Simulation]. 2012, no. 4 (36), pp. 234–240. [In Russian]
22. Kryukova S. V., Simakina T. E. *Obshchestvo. Sreda. Razvitie* [Society. Environment. Development]. 2018, no. 1, pp. 144–151. [In Russian]

23. *Interpolyatsiya blizhayshey okrestnosti* [Nearest neighborhood interpolation]. Arch-Map website. Available at: <https://desktop.arcgis.com/ru/arcmap/10.3/manage-data/terrains/hidden-natural-neighbor-interpolation.htm> [In Russian]
24. Mal'tsev K. A., Mukharamova S. S. *Postroenie modeley prostranstvennykh peremennykh (s primeneniem paketa Surfer): ucheb. posobie* [Building models of spatial variables (using the Surfer package): a textbook]. Kazan: Kazan. un-t, 2014, 103 p. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F666019761/posobie_Surfer.pdf [In Russian]
25. Aleksandrova N. V., Zimin A. P., Kosnikov Yu. N., Khoang T. Kh. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Ser.: Tekhnicheskie nauki. Informatsionnye tekhnologii* [XXI century: results of the past and problems of the present plus. Ser.: Technical Sciences. Information technology]. 2015, no. 3 (25), vol. 1, pp. 51–60. [In Russian]
26. Skala V. *International Conference on Computational Science, ICCS 2017*. Procedia Computer Science. 2017, vol. 108, pp. 2433–2437. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187705091730621X>
27. Buhmann M. *Mathematics of Computation*. 2001, vol. 70, no. 233, pp. 307–318. DOI 10.1090/s0025-5718-00-01251-5.
28. Skala V., Cervenka M. *2019 IEEE 15th International Scientific Conference on Informatics*. 2019, pp. 000451–000456. DOI 10.1109/Informatics47936.2019.9119276.
29. Kosnikov Yu. N. *Problemy informatiki v obrazovanii, upravlenii, ekonomike i tekhnike: sb. st. XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Problems of Informatics in Education, Management, Economics and Technology: collection of articles of the XV International scientific and technical conf.]. Penza: Privolzhskiy Dom znaniy, 2015, pp. 117–123. [In Russian]
30. Kosnikov Yu. N. *Problemy informatiki v obrazovanii, upravlenii, ekonomike i tekhnike: sb. st. XVIII Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Problems of Informatics in Education, Management, Economics and Technology: collection of articles of the XVIII International scientific and technical conf.]. Penza: Privolzhskiy Dom znaniy, 2018, pp. 104–110. [In Russian]
31. Kosnikov Yu. N., Kuzmin A. V., Hoang T. H. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018, vol. 1015. Available at: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032066/pdf>

Косников Юрий Николаевич

доктор технических наук, профессор,
кафедра информационно-
вычислительных систем,
Пензенский государственный
университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: kosnikov@gmail.com

Kosnikov Yuri Nikolaevich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of information
and computing systems,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Косников, Ю. Н. Особенности применения радиальных базисных функций в геометрическом моделировании трехмерных объектов визуализации / Ю. Н. Косников // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2020. – № 4 (36). – С. 55–70. – DOI 10.21685/2227-8486-2020-4-6.